

Probe-Klausur

Mathematik · Klasse 10 · Gymnasium Baden-Württemberg

Themen: Extrem- und Wendestellen · Binomialverteilung

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Gesamt
/10	/8	/10	/8	/10	/9	/9	/64

Hinweise: Erlaubte Hilfsmittel: Geodreieck, Taschenrechner (WTR, nicht programmierbar). Zeige alle Rechenwege vollständig. Begründe deine Aussagen. Zeit: **90 Minuten**.

Aufgabe 1 Monotonie und Extremstellen bestimmen (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

a) Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$.

/ 2 Punkte

b) Berechne die Nullstellen von f' und bestimme mit dem Vorzeichenwechsel-Kriterium oder mit f'' , ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt.

/ 5 Punkte

c) Gib die Monotonieintervalle von f vollständig an.

/ 3 Punkte

Aufgabe 2 Wendepunkt und Wendetangente (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

a) Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.

/ 2 Punkte

b) Bestimme alle Wendepunkte von f . Nutze dafür die notwendige Bedingung

$f''(x) = 0$ und das hinreichende Kriterium $f'''(x) \neq 0$.

/ 4 Punkte

c) Berechne die Gleichung der Wendetangente an einer der Wendestellen mit $x > 0$.

/ 2 Punkte

Aufgabe 3 Grenzen der Ableitungskriterien (10 Punkte)**Wichtiger Hinweis**

Nicht jede Nullstelle von f' ist eine Extremstelle, und nicht jede Nullstelle von f'' ist eine Wendestelle! Das notwendige Kriterium allein reicht nicht aus – es muss immer das hinreichende Kriterium (Vorzeichenwechsel oder höhere Ableitung) überprüft werden.

- a) Gegeben ist $g(x) = x^4$. Zeige, dass $g'(0) = 0$ gilt, aber dass $x = 0$ **keine** Extremstelle im klassischen Sinn mit Vorzeichenwechsel von g' ist – oder doch? Untersuche das Vorzeichen von g' links und rechts von $x = 0$ und entscheide begründet.

/ 4 Punkte

- b) Gegeben ist $h(x) = x^5$. Zeige, dass $h'(0) = 0$ und $h''(0) = 0$ gelten. Ist $x = 0$ eine Extremstelle, eine Wendestelle, oder keins von beidem? Begründe mit einer

Vorzeichenuntersuchung von h' .

/ 4 Punkte

- c) Formuliere in eigenen Worten, warum das alleinige Nachprüfen von $f'(x_0) = 0$

nicht ausreicht, um auf eine Extremstelle zu schließen.

/ 2 Punkte

Aufgabe 4 Aussagen anhand des Graphen beurteilen (8 Punkte)

Der Graph einer Funktion f verläuft für $x \in [-3; 4]$ wie folgt: f fällt streng monoton auf $[-3; -1]$, hat bei $x = -1$ einen Tiefpunkt, steigt streng monoton auf $[-1; 2]$, hat bei $x = 2$ einen Hochpunkt und fällt anschließend auf $[2; 4]$.

Beurteile die folgenden Aussagen. Entscheide jeweils, ob die Aussage **wahr** oder **falsch** ist, und begründe deine Entscheidung ausführlich (ggf. mit einem Gegenbeispiel oder einer Skizze).

a) „Die Funktion f hat in $[-3; 4]$ genau zwei Extremstellen.“

/ 2 Punkte

b) „Da f bei $x = -1$ einen Tiefpunkt und bei $x = 2$ einen Hochpunkt hat, muss f dazwischen mindestens eine Wendestelle besitzen.“

/ 3 Punkte

c) „Weil f auf $[-1; 2]$ streng monoton steigt, gilt $f'(x) > 0$ für **alle** $x \in [-1; 2]$, auch für $x = -1$ und $x = 2$ selbst.“

/ 3 Punkte

Aufgabe 5 Binomialverteilung – Grundlagen (10 Punkte)

Eine Firma stellt Markenchips her. Erfahrungsgemäß sind 8 % aller produzierten Tüten unterfüllt (zu wenig Inhalt). Es wird eine Stichprobe von $n = 25$ Tüten zufällig entnommen. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der unterfüllten Tüten in der Stichprobe.

- a) Begründe, warum X binomialverteilt ist. Gib die Parameter n und p an.

/ 2 Punkte

- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 Tüten unterfüllt sind.

/ 2 Punkte

- c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Tüten unterfüllt sind.

/ 2 Punkte

- d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 4 Tüten unterfüllt sind.

/ 2 Punkte

- e) Bestimme den Erwartungswert μ und interpretiere ihn im Sachzusammenhang.

/ 2 Punkte

Aufgabe 6 Histogramm und Erwartungswert interpretieren (9 Punkte)

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus $n = 20$ Fragen mit je 4 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Ein Schüler rät bei jeder Frage zufällig. X sei die Anzahl der richtig geratenen Antworten.

a) Gib die Verteilung von X an (Parameter n und p).

/ 2 Punkte

b) Berechne den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

/ 3 Punkte

c) Im Histogramm der Verteilung ist die höchste Säule bei $x = 5$ zu erkennen. Erkläre, was dieser Wert bedeutet und in welchem Zusammenhang er zum Erwartungswert aus b) steht.

/ 2 Punkte

d) Der Schüler braucht mindestens 10 richtige Antworten, um den Test zu bestehen. Begründe anhand des Erwartungswertes, ob es wahrscheinlich ist, dass er allein durch Raten besteht (ohne die genaue Wahrscheinlichkeit zu berechnen).

/ 2 Punkte

Aufgabe 7 Statistisches Problem modellieren(9 Punkte)

Bei einem Gewinnspiel eines Fast-Food-Restaurants gewinnt jede dritte Cola-Flasche einen Gratis-Burger ($p = \frac{1}{3}$). Ein Kunde kauft an einem Tag $n = 12$ Flaschen Cola.

- a) Formuliere das zugehörige Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette. Gib X , n und p an. / 2 Punkte

- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde genau 5 Gratis-Burger gewinnt. / 2 Punkte

- c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde zwischen 3 und 6 Gratis-Burger gewinnt (jeweils einschließlich). / 3 Punkte

- d) Der Kunde behauptet: „Ich werde sicher mindestens 4 Burger gewinnen, weil ich 12 Flaschen kaufe und die Gewinnwahrscheinlichkeit ein Drittel beträgt – das sind ja rechnerisch genau 4.“ Nimm zu dieser Aussage Stellung. / 2 Punkte

Lösungen zur Selbstkontrolle

Die Lösungen zeigen einen möglichen Rechenweg. Andere korrekte Wege sind selbstverständlich ebenfalls richtig. Kontrolliere vor allem dein Ergebnis – und lerne aus Fehlern!

Lösung Aufgabe 1 – Monotonie und Extremstellen

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $f''(x) = 6x - 12$

b) NS von f' : $3x^2 - 12x + 9 = 0 \mid : 3: x^2 - 4x + 3 = 0$. Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$. $x_1 = 1, x_2 = 3$.

$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow$ **Hochpunkt bei $x = 1$.** $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$. **HP(1|5).**

$f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow$ **Tiefpunkt bei $x = 3$.** $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$. **TP(3|1).**

c) Monotonietabelle:

x	$x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	steigend	HP	fallend	TP	steigend

Monoton steigend auf $(-\infty; 1)$ und $(3; +\infty)$. Monoton fallend auf $(1; 3)$.

Lösung Aufgabe 2 – Wendepunkt und Wendetangente

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$$

a) $f'(x) = x^3 - 4x$ $f''(x) = 3x^2 - 4$

b) $f''(x) = 0: 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1,155$.

$f'''(x) = 6x$. Für $x \approx 1,155$: $f''' > 0 \neq 0 \checkmark$. Für $x \approx -1,155$: $f''' < 0 \neq 0 \checkmark$. Beide sind also tatsächlich Wendestellen.

$f(1,155) = \frac{1}{4}(1,155)^4 - 2(1,155)^2 + 3 \approx 1,89$.

Wendepunkte: $W_1(1,155|1,89)$ und $W_2(-1,155|1,89)$ (symmetrisch, da f achsensymmetrisch ist).

c) Wendetangente bei $x_0 \approx 1,155$: $m = f'(1,155) = (1,155)^3 - 4 \cdot 1,155 \approx -3,08$.

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \approx -3,08(x - 1,155) + 1,89 \approx -3,08x + 5,45$.

Lösung Aufgabe 3 – Grenzen der Ableitungskriterien

a) $g(x) = x^4$, $g'(x) = 4x^3$. $g'(0) = 0$ ✓.

Vorzeichen von g' : für $x < 0$ ist $g'(x) = 4x^3 < 0$ (negativ), für $x > 0$ ist $g'(x) > 0$ (positiv). Es gibt also doch einen Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ $\Rightarrow x = 0$ **ist** eine Extremstelle (genauer: ein Tiefpunkt) – auch wenn $g''(0) = 0$ ist und das übliche zweite Kriterium hier versagt, liefert die Vorzeichenuntersuchung von g' trotzdem das richtige Ergebnis.

b) $h(x) = x^5$, $h'(x) = 5x^4$, $h''(x) = 20x^3$. $h'(0) = 0$ und $h''(0) = 0$ ✓.

Vorzeichen von h' : $h'(x) = 5x^4 \geq 0$ für **alle** x (da x^4 stets nicht-negativ ist) – kein Vorzeichenwechsel!

$\Rightarrow x = 0$ ist **keine** Extremstelle.

Da $h'''(x) = 60x^2$ und $h'''(0) = 0$ auch hier versagt, betrachten wir $h^{(4)}(x) = 120x$, $h^{(4)}(0) = 0$ ebenfalls 0. Erst $h^{(5)}(x) = 120 \neq 0$ (ungerade Ableitung $\neq 0$ bei gerader Vielfachheit der Nullstelle) zeigt: $x = 0$ ist eine **Wendestelle** (mit waagerechter Wendetangente, ein sogenannter Sattelpunkt).

c) $f'(x_0) = 0$ ist nur eine **notwendige**, aber keine **hinreichende** Bedingung für eine Extremstelle. Sie sagt nur, dass die Tangente an dieser Stelle waagerecht ist – das kann auch bei einem Sattelpunkt (wie bei $h(x) = x^5$) der Fall sein, ohne dass dort ein Maximum oder Minimum vorliegt. Man muss daher zusätzlich einen Vorzeichenwechsel von f' (oder $f''(x_0) \neq 0$) nachweisen.

Lösung Aufgabe 4 – Aussagen beurteilen

- a) Wahr.** Im beschriebenen Intervall hat f genau einen Tiefpunkt (bei $x = -1$) und genau einen Hochpunkt (bei $x = 2$) – das sind insgesamt zwei Extremstellen. Es werden keine weiteren Monotoniewechsel beschrieben.
- b) Wahr.** Zwischen einem Tiefpunkt und einem Hochpunkt ändert sich das Krümmungsverhalten zwingend: Am Tiefpunkt ist der Graph linksgekrümmt (konvex), am Hochpunkt rechtsgekrümmt (konkav). Da sich die Krümmung von konvex zu konkav ändern muss, liegt nach dem Zwischenwertsatz (für stetige Funktionen) dazwischen mindestens eine Wendestelle.
- c) Falsch.** An den Randstellen $x = -1$ und $x = 2$ selbst handelt es sich um Extremstellen – dort ist $f'(x) = 0$ (waagerechte Tangente), nicht $f'(x) > 0$. Die Aussage $f'(x) > 0$ gilt nur im **offenen** Intervall $(-1; 2)$, nicht an den Rändern selbst.

Lösung Aufgabe 5 – Binomialverteilung Grundlagen

- a)** Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette: Jede Tüte wird unabhängig voneinander geprüft, es gibt nur zwei mögliche Ausgänge (unterfüllt / nicht unterfüllt) mit konstanter Wahrscheinlichkeit. $X \sim B(n; p)$ mit $n = 25$, $p = 0,08$.
- b)** $P(X = 3) = \text{binompdf}(25; 0,08; 3) \approx 0,2238$
- c)** $P(X \leq 2) = \text{binomcdf}(25; 0,08; 2) \approx 0,5571$
- d)** $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \text{binomcdf}(25; 0,08; 3) \approx 1 - 0,7809 = 0,2191$
- e)** $\mu = n \cdot p = 25 \cdot 0,08 = 2$. Im Durchschnitt sind in einer Stichprobe von 25 Tüten **2 Tüten** unterfüllt.

Lösung Aufgabe 6 – Histogramm und Erwartungswert

- a)** $X \sim B(20; 0,25)$ (da $p = \frac{1}{4}$ für zufälliges Raten bei 4 Antwortmöglichkeiten).
- b)** $\mu = 20 \cdot 0,25 = 5$. $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = \sqrt{3,75} \approx 1,94$.
- c)** Die höchste Säule bei $x = 5$ entspricht dem **Modus** der Verteilung – dem Wert mit der größten Einzelwahrscheinlichkeit. Bei einer Binomialverteilung liegt der Modus in der Regel sehr nahe am Erwartungswert $\mu = 5$ (hier sogar exakt darauf), was die Berechnung aus b) bestätigt.
- d)** Der Erwartungswert liegt bei $\mu = 5$ richtigen Antworten. Da 10 deutlich über dem Erwartungswert (und auch deutlich mehr als $\mu + 2\sigma \approx 5 + 3,9 = 8,9$) liegt, ist es **sehr unwahrscheinlich**, dass der Schüler allein durch Raten besteht.

Lösung Aufgabe 7 – Statistisches Problem modellieren

- a) Jede Flasche ist ein Bernoulli-Versuch mit den Ausgängen „Gewinn“ ($p = \frac{1}{3}$) oder „kein Gewinn“. $X = \text{Anzahl der Gewinne}$, $X \sim B(n; p)$ mit $n = 12$, $p = \frac{1}{3}$.
- b) $P(X = 5) = \text{binompdf}(12; \frac{1}{3}; 5) \approx 0,1577$
- c) $P(3 \leq X \leq 6) = \text{binomcdf}(12; \frac{1}{3}; 6) - \text{binomcdf}(12; \frac{1}{3}; 2) \approx 0,8424 - 0,1582 = 0,6842$
- d) Die Aussage des Kunden ist **nicht korrekt**. Der **Erwartungswert** $\mu = n \cdot p = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ beschreibt den Wert, den man im **Durchschnitt** über viele Wiederholungen erwarten würde – er ist **keine Garantie** für das Ergebnis eines einzelnen Versuchs. Der tatsächliche Gewinn an einem einzelnen Tag kann durchaus von 4 abweichen (auch deutlich weniger als 4 Gewinne sind möglich, wie z. B. in Teilaufgabe c) mit $P(X < 3) \approx 0,1582$ gezeigt wird).

Punkte-Notenübersicht

Note	1	2	3	4	5	6
Punkte	≥ 58	50 – 57	39 – 49	29 – 38	15 – 28	≤ 14

Gesamtpunktzahl: 64 Punkte

Fehler sind Helfer – Mathe darf leicht sein!

Schau dir jeden Fehler genau an – er zeigt dir genau, was du noch üben musst. Du schaffst das!