

Probe-Klassenarbeit

Mathematik · Klasse 8 · Gymnasium

Themen: Parabeln (Scheitelpunktform, Nullstellen, Schnittpunkte) · Quadratische Gleichungen · Lineare und quadratische Ungleichungen

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Gesamt
/8	/8	/10	/8	/10	/8	/10	/8	/70

Hinweise: Erlaubte Hilfsmittel: Geodreieck, Taschenrechner (nicht programmierbar). Zeige alle Rechenwege vollständig. Zeit: **90 Minuten**.

Aufgabe 1 Scheitelpunktform – Eigenschaften ablesen(8 Punkte)

Gegeben sind folgende Funktionen in Scheitelpunktform. Gib jeweils den Scheitelpunkt S an und beschreibe, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist sowie ob sie gestreckt oder gestaucht ist im Vergleich zur Normalparabel.

a) $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

/ 2 Punkte

b) $g(x) = -2(x + 1)^2 - 4$

/ 2 Punkte

c) $h(x) = \frac{1}{2}(x - 5)^2$

/ 2 Punkte

d) $k(x) = -(x + 2)^2 + 6$

/ 2 Punkte

Aufgabe 2 Parabeln verschieben und Funktionsgleichung aufstellen(8 Punkte)

- a) Die Normalparabel $p(x) = x^2$ wird um 4 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach unten verschoben.

Gib die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform an.

/ 2 Punkte

- b) Die Parabel $f(x) = x^2$ wird mit dem Faktor 3 gestreckt und um 2 Einheiten nach links verschoben. Gib die neue Funktionsgleichung an.

/ 3 Punkte

- c) Eine Parabel hat den Scheitelpunkt $S(2|-5)$ und ist nach unten geöffnet mit Streckfaktor $a = -1$. Stelle die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform auf.

/ 3 Punkte

Aufgabe 3 Von der Normalform zur Scheitelpunktform (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- a) Bestimme den Scheitelpunkt mithilfe der quadratischen Ergänzung. Gib die Scheitelpunktform an.

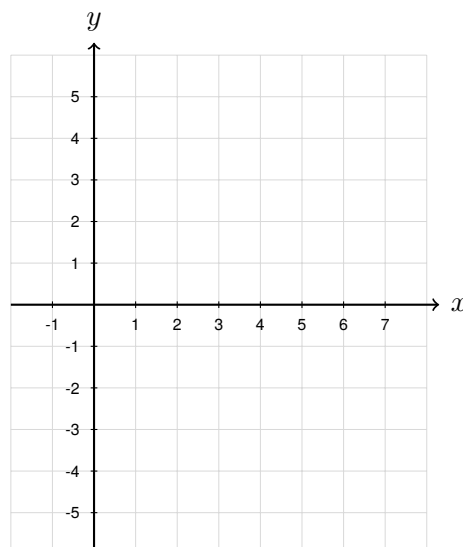
/ 4 Punkte

- b) Berechne die Nullstellen von f (mit der Mitternachtsformel oder durch Faktorisieren).

/ 3 Punkte

- c) Skizziere den Graphen von f im Koordinatensystem. Beschrifte Nullstellen und Scheitelpunkt.

/ 3 Punkte



Aufgabe 4 Quadratische Gleichungen lösen (8 Punkte)

Löse die Gleichungen. Gib die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an.

a) $x^2 - 16 = 0$

/ 1 Punkte

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

/ 2 Punkte

c) $2x^2 - 12x + 10 = 0$

/ 3 Punkte

d) $x^2 + 2x + 3 = 0$

/ 2 Punkte

Aufgabe 5 Schnittpunkte von Parabel und Gerade (10 Punkte)

Gegeben sind die Parabel $f(x) = x^2 - 2x - 3$ und die Gerade $g(x) = x + 1$.

- a) Berechne die Schnittpunkte von f und g . Gib die Koordinaten beider Schnittpunkte an. / 5 Punkte

- b) Berechne zusätzlich die Nullstellen von f . Liegt einer der Schnittpunkte aus a) auch auf der x -Achse? / 3 Punkte

- c) Bestimme, für welchen x -Bereich der Graph von g oberhalb des Graphen von f verläuft. Nutze dafür dein Ergebnis aus a). / 2 Punkte

Aufgabe 6 Lineare Ungleichungen lösen (8 Punkte)

Löse die Ungleichungen und gib die Lösungsmenge an. Stelle die Lösungsmenge zusätzlich auf einem Zahlenstrahl dar.

a) $3x - 5 > 7$

/ 2 Punkte

b) $-2x + 4 \leq 10$ (Achtung: Vorzeichen!)

/ 2 Punkte

c) $5(x - 1) \geq 2x + 7$

/ 2 Punkte

d) $4 - 3x < 2x - 6$

/ 2 Punkte

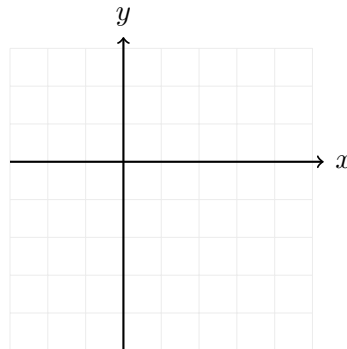
Aufgabe 7 Quadratische Ungleichungen lösen (10 Punkte)

Hinweis zur Vorgehensweise

Bestimme zuerst die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion. Skizziere dann den Verlauf der Parabel (nach oben/unten geöffnet) und lies ab, für welchen x -Bereich die Ungleichung erfüllt ist.

- a) Löse die Ungleichung $x^2 - 4 > 0$. Gib die Lösungsmenge in Intervallschreibweise an. / 3 Punkte

- b) Löse die Ungleichung $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Skizziere zur Kontrolle kurz den Verlauf der Parabel. / 4 Punkte



- c) Löse die Ungleichung $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$. / 3 Punkte

Aufgabe 8 Textaufgabe – Parabel im Sachkontext(8 Punkte)

Ein Brunnen spritzt einen Wasserstrahl, der die Form einer nach unten geöffneten Parabel beschreibt. Der Wasserstrahl verlässt die Düse am Punkt $D(0|0,5)$ (in Metern) und erreicht seinen höchsten Punkt bei $H(1,5|2,1)$.

- a) Stelle die Funktionsgleichung des Wasserstrahls in Scheitelpunktform auf. Nutze dazu den Scheitelpunkt H und den bekannten Punkt D , um den Streckfaktor a zu berechnen.

/ 4 Punkte

- b) Berechne, in welcher horizontalen Entfernung von der Düse der Wasserstrahl wieder auf Höhe 0,5 m auftrifft (also auf derselben Höhe wie die Düse).

/ 3 Punkte

- c) Der Brunnenrand hat einen Radius von 2 m um die Düse. Landet der Wasserstrahl noch innerhalb des Brunnenrandes, wenn er auf Höhe der Düse auftrifft? Begründe mit deinem Ergebnis aus b).

/ 1 Punkte

Lösungen zur Selbstkontrolle

Die Lösungen zeigen einen möglichen Rechenweg. Andere korrekte Wege sind selbstverständlich ebenfalls richtig. Kontrolliere vor allem dein Ergebnis – und lerne aus Fehlern!

Lösung Aufgabe 1 – Scheitelpunktform

a) $f(x) = (x-3)^2 + 2$: Scheitelpunkt $S(3|2)$. Nach oben geöffnet, $a = 1$ – weder gestreckt noch gestaucht (Normalform der Krümmung).

b) $g(x) = -2(x+1)^2 - 4$: Scheitelpunkt $S(-1|-4)$. Nach unten geöffnet (da $a < 0$), gestreckt (da $|a| = 2 > 1$).

c) $h(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2$: Scheitelpunkt $S(5|0)$. Nach oben geöffnet, gestaucht (da $|a| = \frac{1}{2} < 1$).

d) $k(x) = -(x+2)^2 + 6$: Scheitelpunkt $S(-2|6)$. Nach unten geöffnet (da $a = -1 < 0$), nicht gestreckt/gestaucht (da $|a| = 1$).

Lösung Aufgabe 2 – Verschiebung und Aufstellen

a) Verschiebung um 4 nach rechts ($d = 4$) und 3 nach unten ($e = -3$):

$$f(x) = (x-4)^2 - 3$$

b) Streckung mit Faktor 3, Verschiebung um 2 nach links ($d = -2$, also $x - (-2) = x + 2$):

$$f(x) = 3(x+2)^2$$

c) Scheitelpunkt $S(2|-5)$, $a = -1$:

$$f(x) = -(x-2)^2 - 5$$

Lösung Aufgabe 3 – Normalform zu Scheitelpunktform

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

a) Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 5 \\ &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 4 \end{aligned}$$

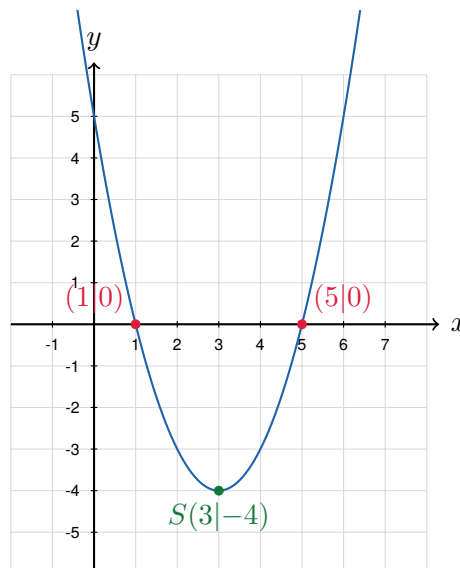
Scheitelpunkt: $S(3|-4)$.

b) Mitternachtsformel mit $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$x_1 = 5$, $x_2 = 1$. NS bei $(1|0)$ und $(5|0)$.

c) Parabel öffnet nach oben, Scheitelpunkt $S(3|-4)$, Nullstellen bei $x = 1$ und $x = 5$ – symmetrisch zur Scheitelachse $x = 3$. Siehe Skizze unten.



Lösung Aufgabe 4 – Quadratische Gleichungen

a) $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$. $\mathbb{L} = \{-4; 4\}$

b) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$. $\mathbb{L} = \{-2\}$

c) $2x^2 - 12x + 10 = 0 \mid : 2: x^2 - 6x + 5 = 0$. Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$. $x_1 = 5$, $x_2 = 1$. $\mathbb{L} = \{1; 5\}$

d) $x^2 + 2x + 3 = 0$: $D = 4 - 12 = -8 < 0$. Keine reelle Lösung. $\mathbb{L} = \{\}$

Lösung Aufgabe 5 – Schnittpunkte Parabel und Gerade

$$f(x) = x^2 - 2x - 3, g(x) = x + 1$$

a) Gleichsetzen:

$$x^2 - 2x - 3 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\text{Mitternachtsformel: } x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}. x_1 = 4, x_2 = -1.$$

$$g(4) = 5 \text{ und } g(-1) = 0.$$

Schnittpunkte: $(4|5)$ und $(-1|0)$.

b) Nullstellen von f : $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$.

Der Schnittpunkt $(-1|0)$ liegt also **auch auf der x -Achse** – er ist gleichzeitig eine Nullstelle von f .

c) Zwischen den Schnittpunkten $x = -1$ und $x = 4$ verläuft die Gerade **oberhalb** der Parabel (da die Parabel nach oben geöffnet ist und außerhalb der Schnittpunkte größer wird):

$$g(x) > f(x) \quad \text{für} \quad -1 < x < 4$$

Lösung Aufgabe 6 – Lineare Ungleichungen

a) $3x - 5 > 7 \mid + 5: 3x > 12 \mid : 3: x > 4. \quad \mathbb{L} = \{x \mid x > 4\}$

b) $-2x + 4 \leq 10 \mid - 4: -2x \leq 6 \mid : (-2) \text{ (Ungleichzeichen dreht sich um!)}: x \geq -3. \quad \mathbb{L} = \{x \mid x \geq -3\}$

c) $5(x - 1) \geq 2x + 7: 5x - 5 \geq 2x + 7 \mid - 2x + 5: 3x \geq 12 \mid : 3: x \geq 4. \quad \mathbb{L} = \{x \mid x \geq 4\}$

d) $4 - 3x < 2x - 6: \mid - 2x - 4: -5x < -10 \mid : (-5) \text{ (dreht sich um!)}: x > 2. \quad \mathbb{L} = \{x \mid x > 2\}$

Zahlenstrahl-Darstellung (Beispiel für a): ein offener Kreis bei $x = 4$, Pfeil/Schraffur nach rechts.

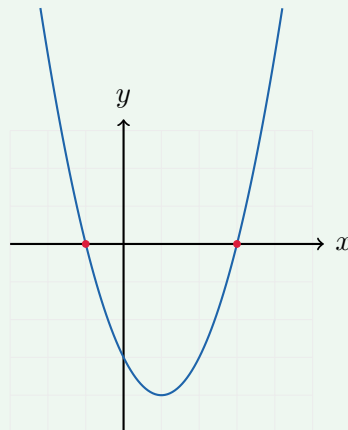
Lösung Aufgabe 7 – Quadratische Ungleichungen

a) $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4$. NS bei $x = \pm 2$. Parabel öffnet nach oben – außerhalb der Nullstellen positiv.

$$\mathbb{L} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

b) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. NS: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$. Parabel öffnet nach oben – zwischen den Nullstellen negativ oder null.

$$\mathbb{L} = [-1; 3]$$



c) $-x^2 + 6x - 5 \geq 0 \mid \cdot (-1) \text{ (dreht das Ungleichzeichen um!)}: x^2 - 6x + 5 \leq 0$. NS: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}: x_1 = 1, x_2 = 5$. Da die ursprüngliche Parabel nach unten geöffnet ist (zwischen den NS positiv):

$$\mathbb{L} = [1; 5]$$

Lösung Aufgabe 8 – Textaufgabe Wasserstrahl

a) Scheitelpunkt $H(1,5|2,1)$:

$$f(x) = a(x - 1,5)^2 + 2,1$$

Einsetzen von $D(0|0,5)$:

$$0,5 = a \cdot (0 - 1,5)^2 + 2,1 = 2,25a + 2,1$$

$$-1,6 = 2,25a \Rightarrow a = -\frac{1,6}{2,25} \approx -0,711$$

$$f(x) \approx -0,711(x - 1,5)^2 + 2,1$$

b) Gesucht: x mit $f(x) = 0,5$ (außer $x = 0$). Da die Parabel symmetrisch zur Scheitelachse $x = 1,5$ ist, liegt die zweite Lösung symmetrisch zu $D(0|0,5)$:

$$x = 2 \cdot 1,5 - 0 = 3$$

Der Wasserstrahl trifft also bei $x = 3$ m wieder auf Höhe $0,5$ m auf.

c) Der Brunnenrand hat einen Radius von 2 m. Da $3 \text{ m} > 2 \text{ m}$, landet der Wasserstrahl **außerhalb** des Brunnenrandes – er würde über den Rand hinausspritzen.

Punkte-Notenübersicht

Note	1	2	3	4	5	6
Punkte	≥ 63	$54 - 62$	$42 - 53$	$32 - 41$	$17 - 31$	≤ 16

Gesamtpunktzahl: 70 Punkte

Fehler sind Helfer – Mathe darf leicht sein!

Schau dir jeden Fehler genau an – er zeigt dir genau, was du noch üben musst. Du schaffst das!