

Probe-Klassenarbeit Mathematik

Differentialrechnung: Ableitungsregeln

Potenzregel | Faktorregel | Summenregel | Produktregel | Kettenregel
Ganzrationale, Exponential- und trigonometrische Funktionen

Teil I: ohne Hilfsmittel, 45 Min · Teil II: mit Taschenrechner, 45 Min · Gesamt: 90 Min

Name: _____ Kurs: _____ Datum: _____

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	Gesamt	Note
/10	/10	/8	/12	/10	/12	/10	/8	/80	

Bewertung: Note 1: ≥ 72 P. Note 2: 60–71 P. Note 3: 45–59 P. Note 4: 28–44 P. Note 5: 14–27 P. Note 6: ≤ 13 P.

Ableitungsregeln – Formelübersicht (zum Nachschlagen)

Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Faktorregel: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

Summenregel: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Exponential: $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$

Trig.: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Hinweise: Alle Rechenwege vollständig aufschreiben. Ableitungsregeln benennen, wo verlangt. Ergebnisse so weit wie möglich vereinfachen.

Teil I | Ohne Hilfsmittel | 45 Minuten**Aufgabe 1 Potenz-, Faktor- und Summenregel** (10 Punkte)

Bestimme die Ableitungsfunktionen. Vereinfache so weit wie möglich. Benenne die verwendeten Regeln.

a) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

 / 2 P.

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{4}x^2 + \sqrt{2}x$

 / 2 P.

c) $h(x) = x^{-3} + 4x^{-1} - 2x^{\frac{1}{2}}$

 / 2 P.

d) $k(x) = \frac{2x^5 - 3x^3 + x}{x^2}$ (Zuerst kürzen!)

 / 2 P.

e) $p(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$ (Zuerst ausmultiplizieren!)

 / 2 P.

Aufgabe 2 Produktregel (10 Punkte)

Leite ab. Benenne die Produktregel und fasse das Ergebnis zusammen.

a) $f(x) = (3x^2 - 1) \cdot (x^3 + 2x)$

/ 2 P.

b) $g(x) = (2x^3 - 5) \cdot (4x^2 + 3x - 1)$

/ 2 P.

c) $h(x) = x^2 \cdot e^x$

/ 2 P.

d) $k(x) = (x^3 - 2x) \cdot \sin x$

/ 2 P.

e) $p(x) = e^x \cdot \cos x$

/ 2 P.

Aufgabe 3 Kettenregel (8 Punkte)

Leite ab. Benenne die äußere und innere Funktion.

a) $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^4$

/ 2 P.

b) $g(x) = e^{2x^3 - x}$

/ 2 P.

c) $h(x) = \sin(5x^2 - 3)$

/ 2 P.

d) $k(x) = \sqrt{x^3 + 4x}$

/ 2 P.

Aufgabe 4 Kombinierte Regeln: Ketten- und Produktregel (12 Punkte)

Leite ab. Gib an, welche Regeln du kombinierst.

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$

/ 3 P.

b) $g(x) = (x^2 + 1) \cdot \sin(2x)$

/ 3 P.

c) $h(x) = e^{x^2} \cdot \cos(x)$

□ / 3 P.

d) $k(x) = \sin^3(x)$ (Schreibe als $(\sin x)^3$, dann Kettenregel)

□ / 3 P.

Teil II | Mit Taschenrechner | 45 Minuten

Aufgabe 5 Tangente und Normale (10 Punkte)

a) Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(2, f(2))$. □ / 4 P.

Tangentengleichung: _____

b) Gegeben ist $g(x) = e^{2x} - 3x$.

Bestimme alle Punkte, in denen der Graph von g eine horizontale Tangente besitzt.

(Exakte Lösung angeben.) □ / 3 P.

c) Gegeben ist $h(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$.

Zeige, dass $h'(x) = 2 \cos(2x)$. (Hinweis: Produktregel, dann Additionstheorem: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.) □ / 3 P.

Aufgabe 6 Anspruchsvolle Ableitungen (12 Punkte)

Bestimme $f'(x)$. Fasse so weit wie möglich zusammen.

a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (Summenregel auf Bruch anwenden)

/ 2 P.

b) $g(x) = x^3 \cdot e^{-x^2}$

/ 3 P.

c) $h(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$

/ 3 P.

d) $k(x) = \sin^2(3x) + \cos^2(3x)$ (Rechne zuerst, dann überprüfe!)

/ 2 P.

e) $p(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ (Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$)

/ 2 P.

Aufgabe 7 Kurvendiskussion mit Ableitungsregeln (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ mit $D = \mathbb{R}$.

a) Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$. Benenne die verwendeten Regeln.

/ 4 P.

b) Bestimme alle lokalen Extremstellen von f . Charakterisiere sie (Hoch- oder Tiefpunkt).

/ 3 P.

c) Bestimme alle Wendepunkte von f .

/ 3 P.

Aufgabe 8 Wahr oder falsch? Begründe! (8 Punkte)

Aussage	w	f	Begründung
a) $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$			
b) $(e^{3x})' = 3e^{3x}$			
c) $(\sin(x^2))' = \cos(x^2)$			
d) $(x^2 \cdot e^x)'' = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$			
e) Die Ableitung von $f(x) = 5$ ist $f'(x) = 5$			
f) $(\cos(2x))' = -2 \sin(2x)$			
g) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(n)}(x) = e^x$ für alle $n \in \mathbb{N}$			
h) $(\sin x \cdot \cos x)' = \cos(2x)$			

Lösungsblatt (nur für die Lehrkraft)

Punkte in Klammern. Andere äquivalente Formen der Ergebnisse sind ebenfalls korrekt. Regelbenennung zählt je ½ Punkt. Zwischenschritte müssen erkennbar sein.

Lösung Aufgabe 1 (10 P.)

- a) $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 7$. [Potenz-, Faktor-, Summenregel] (2 P.)
- b) $g'(x) = 3x^5 - \frac{3}{2}x + \sqrt{2}$. (2 P.)
- c) $h'(x) = -3x^{-4} - 4x^{-2} - x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. (2 P.)
- d) Kürzen: $k(x) = 2x^3 - 3x + x^{-1}$. $k'(x) = 6x^2 - 3 - x^{-2} = 6x^2 - 3 - \frac{1}{x^2}$. (2 P.)
- e) Ausmultiplizieren: $p(x) = x + 2 + x^{-1}$. $p'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$. (2 P.)

Lösung Aufgabe 2 (10 P.)

- a) $f' = (6x)(x^3 + 2x) + (3x^2 - 1)(3x^2 + 2) = 6x^4 + 12x^2 + 9x^4 + 6x^2 - 3x^2 - 2 = 15x^4 + 15x^2 - 2$. (2 P.)
- b) $g' = (6x^2)(4x^2 + 3x - 1) + (2x^3 - 5)(8x + 3) = 24x^4 + 18x^3 - 6x^2 + 16x^4 + 6x^3 - 40x - 15 = 40x^4 + 24x^3 - 6x^2 - 40x - 15$. (2 P.)
- c) $h' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x) = xe^x(x + 2)$. (2 P.)
- d) $k' = (3x^2 - 2)\sin x + (x^3 - 2x)\cos x$. (2 P.)
- e) $p' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$. (2 P.)

Lösung Aufgabe 3 (8 P.)

- a) Äußere: u^4 , Innere: $u = 3x^2 - 2x + 1$. $f' = 4(3x^2 - 2x + 1)^3 \cdot (6x - 2) = 8(3x - 1)(3x^2 - 2x + 1)^3$. (2 P.)
- b) Äußere: e^u , Innere: $u = 2x^3 - x$. $g' = e^{2x^3 - x} \cdot (6x^2 - 1)$. (2 P.)
- c) Äußere: $\sin u$, Innere: $u = 5x^2 - 3$. $h' = \cos(5x^2 - 3) \cdot 10x$. (2 P.)
- d) Äußere: $\sqrt{u} = u^{1/2}$, Innere: $u = x^3 + 4x$. $k' = \frac{1}{2}(x^3 + 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 4) = \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}$. (2 P.)

Lösung Aufgabe 4 (12 P.)

- a) Produkt- + Kettenregel: $f' = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = e^{3x}(2x + 3x^2) = xe^{3x}(3x + 2)$. (3 P.)
- b) Produkt- + Kettenregel: $g' = 2x \cdot \sin(2x) + (x^2 + 1) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 2x \sin(2x) + 2(x^2 + 1) \cos(2x)$. (3 P.)
- c) Produkt- + Kettenregel: $h' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot \cos x + e^{x^2} \cdot (-\sin x) = e^{x^2}(2x \cos x - \sin x)$. (3 P.)
- d) Kettenregel: Äußere u^3 , Innere $\sin x$. $k' = 3\sin^2(x) \cdot \cos x$. (3 P.)

Lösung Aufgabe 5 (10 P.)

- a)** $f(2) = 8 - 12 + 4 - 1 = -1$. Also $P(2, -1)$. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$; $f'(2) = 12 - 12 + 2 = 2$. Tangente: $y = -1 + 2(x - 2) = 2x - 5$. **(4 P.)**
- b)** $g'(x) = 2e^{2x} - 3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow e^{2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = \ln \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. Punkt: $g\left(\frac{\ln(3/2)}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2}$. **(3 P.)**
- c)** Produktregel: $h' = 2 \cos x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot (-\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos(2x)$. ✓ **(3 P.)**

Lösung Aufgabe 6 (12 P.)

- a)** $f' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. **(2 P.)**
- b)** Produkt- + Kettenregel: $g' = 3x^2 \cdot e^{-x^2} + x^3 \cdot (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4) = x^2 e^{-x^2}(3 - 2x^2)$. **(3 P.)**
- c)** Produkt- + Kettenregel: $h' = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$. **(3 P.)**
- d)** $\sin^2(3x) + \cos^2(3x) = 1$ (pyth. Identität). $k'(x) = 0$. Ableitung der Konstante 1 ist 0. **(2 P.)**
- e)** Quotientenregel: $p' = \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$. **(2 P.)**

Lösung Aufgabe 7 (10 P.)

- a)** Produktregel + Kettenregel: $f' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2) = xe^{-x}(2 - x)$. $f'' = e^{-x}(2 - x) + e^{-x}(-1) \cdot (2x - x^2) \cdot (-1) = e^{-x}(2 - 2x) + e^{-x}(-2x + x^2 - 2 + 2x - x^2 + 2x)$. Sauber: $f'' = (f')' = (2xe^{-x} - x^2e^{-x})' = (2 - 2x)e^{-x} + (-x^2 + 2x)(-e^{-x}) \dots$ direkter: $f'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. **(4 P.)**
- b)** $f' = 0$: $xe^{-x}(2 - x) = 0$. $e^{-x} > 0$ immer, also $x = 0$ oder $x = 2$. $f(0) = 0$: $f''(0) = e^0(0 - 0 + 2) = 2 > 0 \Rightarrow$ **Tiefpunkt** $(0, 0)$. $f(2) = 4e^{-2}$: $f''(2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow$ **Hochpunkt** $(2, 4e^{-2})$. **(3 P.)**
- c)** $f'' = 0$: $e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$. $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Vorzeichenwechsel prüfen $\Rightarrow$ Wendepunkte bei $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,59$ und $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$. **(3 P.)**

Lösung Aufgabe 8 (8 P.)

- a) Falsch.** Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$. **b) Wahr.** Kettenregel: $3e^{3x}$. **c) Falsch.** Kettenregel fehlt: $(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$. **d) Wahr.** $(x^2e^x)' = e^x(x^2 + 2x)$; $(e^x(x^2 + 2x))' = e^x(x^2 + 2x) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 2)$. **e) Falsch.** Konstante Funktion: $f'(x) = 0$. **f) Wahr.** Kettenregel: $-\sin(2x) \cdot 2 = -2\sin(2x)$. **g) Wahr.** e^x ist zu sich selbst invariant unter Ableitung. **h) Wahr.** Produktregel: $\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$. Je 1 Punkt. **(8 P.)**

Fehler sind Helfer, Mathe darf leicht sein!

Mehr Materialien auf www.mathsparks.de und unter
eduki.com/de/autor/15428/mathsparks