

Alle Ableitungsregeln

auf einen Blick

Faktorregel, Potenzregel, Summenregel, Produktregel und Kettenregel
für jede Funktionsart

Gymnasium Baden Württemberg, Einführungsphase bis Abitur

Ein MathSparks Produkt von Meike Iwanek, www.mathsparks.de

Was dich in diesem Workbook erwartet

Dieses Workbook erklärt alle Ableitungsregeln, die in der Schule vorkommen, und zeigt dir, wie du sie auf jeden Funktionstyp anwendest. Du findest klare Erklärungen, vollständig durchgerechnete Beispiele, Übungsaufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad und ausführliche Lösungen.

Am Ende des Workbooks lernst du außerdem, wie man mehrere Regeln kombiniert anwendet, denn genau das wird im Abitur besonders häufig verlangt.

Für wen? Schülerinnen und Schüler der Einführungsphase und der Kursstufe, die sich sicher auf das Abitur vorbereiten möchten.

So arbeitest du mit diesem Workbook

1. Lies den roten Merkkasten, dort steht die Regel mit Formel.
2. Schau dir das blaue Beispiel genau an und verfolge jeden Rechenschritt.
3. Löse die Aufgaben selbst und nutze dafür den Freiraum auf der Seite.
4. Vergleiche deine Lösung mit der grünen Lösungsbox.
5. Wenn ein Fehler passiert, lies die Regel noch einmal in Ruhe durch, denn Fehler gehören zum Lernen dazu.

Kapitel 1, Die Grundregeln im Überblick

Faktorregel, Summenregel und Potenzregel

Diese drei Regeln bilden das Fundament jeder Ableitung. Sie gelten für alle ganzrationalen Funktionen und werden auch bei allen anderen Funktionstypen immer wieder gebraucht.

Potenzregel. Eine Potenzfunktion wird abgeleitet, indem der Exponent als Faktor vor die Variable geschrieben wird und der Exponent anschließend um eins verringert wird.

$$f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Faktorregel. Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten einfach stehen und wird mit der Ableitung der restlichen Funktion multipliziert.

$$f(x) = c \cdot u(x) \implies f'(x) = c \cdot u'(x)$$

Summenregel. Eine Summe aus mehreren Termen wird abgeleitet, indem jeder Summand für sich einzeln abgeleitet wird.

$$f(x) = u(x) + v(x) \implies f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Beispiel: Ganzrationale Funktion ableiten

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 2$.

Jeder Summand wird einzeln mit der Potenzregel abgeleitet, und konstante Faktoren bleiben dabei stehen.

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 5 \cdot 2x + 7 - 0 = 12x^3 - 10x + 7$$

Der letzte Summand, die Zahl minus zwei, fällt weg, weil die Ableitung einer Konstante immer null ist.

Tipp

Schreibe dir Potenzen immer so um, dass du die Potenzregel direkt anwenden kannst. Ein Bruch wie eins durch x Quadrat wird zu x hoch minus zwei, und eine Wurzel aus x wird zu x hoch ein halb. So wird aus einer ungewohnten Form eine vertraute Potenzfunktion.

Aufgabe 1, Grundregeln anwenden

Leite die folgenden Funktionen vollständig ab.

a) $f(x) = 5x^3$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - 3x$

b) $f(x) = x^7 - 4x^3$

e) $f(x) = 7$

c) $f(x) = 2x^5 + 6x^2 - 9$

f) $f(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x$

Lösung: Aufgabe 1

a) $f'(x) = 15x^2$

b) $f'(x) = 7x^6 - 12x^2$

c) $f'(x) = 10x^4 + 12x$

d) $f'(x) = 3x^5 - 3$

e) $f'(x) = 0$

f) $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Kapitel 2, Wurzel und Bruchfunktionen mit der Potenzregel

Wurzeln und Brüche als Potenzen schreiben

Wurzelfunktionen und Bruchfunktionen lassen sich mit den Gesetzen der Potenzrechnung in die Form x^n bringen, und dann wird ganz normal die Potenzregel angewendet.

Wurzeln als Potenz.

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Brüche als Potenz mit negativem Exponenten.

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Nach dem Umschreiben wird die Potenzregel wie gewohnt angewendet, und am Ende darf das Ergebnis wieder als Wurzel oder Bruch geschrieben werden.

Beispiel: Wurzelfunktion ableiten

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.

Zuerst wird die Wurzel als Potenz geschrieben, dann wird abgeleitet.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Beispiel: Bruchfunktion ableiten

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

Zuerst wird der Bruch als Potenz mit negativem Exponenten geschrieben.

$$f(x) = 3x^{-2} \implies f'(x) = 3 \cdot (-2)x^{-3} = -6x^{-3} = -\frac{6}{x^3}$$

Aufgabe 2, Wurzel und Bruchfunktionen ableiten

Schreibe jede Funktion zuerst als Potenz, leite dann ab und gib das Ergebnis wieder als Wurzel oder Bruch an.

a) $f(x) = \sqrt{x^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

c) $f(x) = 4\sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{x}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

f) $f(x) = \frac{5}{x^3} - 3\sqrt{x}$

Lösung: Aufgabe 2

a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, also $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

b) $f(x) = x^{-4}$, also $f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

c) $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$, also $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, also $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

f) $f'(x) = -\frac{15}{x^4} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$

Kapitel 3, Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen

Die wichtigsten Grundableitungen

Für die natürliche Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen gibt es feste Grundableitungen, die du dir einprägen solltest. Faktorregel und Summenregel gelten dabei genauso wie bei ganzrationalen Funktionen.

Exponentialfunktion.

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$$

Die natürliche Exponentialfunktion ist also ihre eigene Ableitung, was sie zu einer besonderen Funktion macht.

Sinus und Kosinus.

$$f(x) = \sin(x) \implies f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\sin(x)$$

Eine gute Eselsbrücke ist, dass beim Ableiten von Sinus und Kosinus immer zwischen diesen beiden Funktionen hin und her gewechselt wird, und beim zweiten Schritt ein Minuszeichen dazukommt.

Beispiel: Exponential- und trigonometrische Funktion ableiten

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3e^x + 2\sin(x) - 4\cos(x)$.

Mit Faktorregel und Summenregel wird jeder Summand für sich abgeleitet.

$$f'(x) = 3e^x + 2\cos(x) - 4 \cdot (-\sin(x)) = 3e^x + 2\cos(x) + 4\sin(x)$$

Aufgabe 3, Exponential- und trigonometrische Funktionen ableiten

a) $f(x) = 5e^x$

d) $f(x) = 4\cos(x) - 3e^x$

b) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

e) $f(x) = 2\sin(x) + x^3$

c) $f(x) = e^x - x^2$

f) $f(x) = e^x + \sin(x) - \cos(x)$

Lösung: Aufgabe 3

a) $f'(x) = 5e^x$

b) $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

c) $f'(x) = e^x - 2x$

d) $f'(x) = -4\sin(x) - 3e^x$

e) $f'(x) = 2\cos(x) + 3x^2$

f) $f'(x) = e^x + \cos(x) + \sin(x)$

Kapitel 4, Die Kettenregel

Die Kettenregel für verschachtelte Funktionen

Die Kettenregel wird immer dann gebraucht, wenn eine Funktion in eine andere Funktion eingesetzt ist, man spricht dann von einer verschachtelten oder verketteten Funktion.

$$f(x) = u(v(x)) \implies f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

In Worten bedeutet das, dass zuerst die äußere Funktion abgeleitet wird, wobei die innere Funktion unverändert stehen bleibt, und das Ergebnis anschließend mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert wird. Diese Eselsbrücke heißt äußere Ableitung mal innere Ableitung.

Innere und äußere Funktion erkennen. Die innere Funktion ist immer das, was in einer Klammer steht oder im Exponenten beziehungsweise unter der Wurzel auftaucht. Die äußere Funktion ist die Funktion, die um die innere Funktion herum liegt.

Beispiel: Kettenregel bei einer Potenzfunktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (3x^2 + 1)^5$.

Die innere Funktion ist $v(x) = 3x^2 + 1$ mit der Ableitung $v'(x) = 6x$. Die äußere Funktion ist das Potenzieren mit fünf.

$$f'(x) = 5 \cdot (3x^2 + 1)^4 \cdot 6x = 30x \cdot (3x^2 + 1)^4$$

Beispiel: Kettenregel bei einer Exponentialfunktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{4x-1}$.

Die innere Funktion ist $v(x) = 4x - 1$ mit der Ableitung $v'(x) = 4$. Die äußere Funktion ist die Exponentialfunktion, die beim Ableiten unverändert bleibt.

$$f'(x) = e^{4x-1} \cdot 4 = 4e^{4x-1}$$

Beispiel: Kettenregel bei einer trigonometrischen Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x + 3)$.

Die innere Funktion ist $v(x) = 2x + 3$ mit der Ableitung $v'(x) = 2$.

$$f'(x) = \cos(2x + 3) \cdot 2 = 2 \cos(2x + 3)$$

Beispiel: Kettenregel bei einer Wurzelfunktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

Die Wurzel wird zunächst als Potenz mit dem Exponenten ein halb geschrieben, dann wird die Kettenregel angewendet. Die innere Funktion ist $v(x) = x^2 + 4$ mit der Ableitung $v'(x) = 2x$.

$$f(x) = (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Tipp

Schreibe dir bei der Kettenregel immer zuerst auf, was die innere Funktion ist, am besten mit einem eigenen Buchstaben wie v von x , und berechne deren Ableitung separat. So verlierst du auch bei komplizierten Funktionen nicht den Überblick.

Aufgabe 4, Kettenregel anwenden

Bestimme jeweils die innere und die äußere Funktion, und leite dann mit der Kettenregel ab.

a) $f(x) = (2x + 5)^4$

b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = \sin(5x)$

d) $f(x) = \sqrt{4x - 1}$

e) $f(x) = \cos(x^2)$

f) $f(x) = (x^3 - 2x)^6$

g) $f(x) = e^{-x^2}$

h) $f(x) = \frac{1}{(2x + 1)^3}$

Lösung: Aufgabe 4

- a)** Innere Funktion $2x + 5$, Ableitung 2. $f'(x) = 4(2x + 5)^3 \cdot 2 = 8(2x + 5)^3$
- b)** Innere Funktion $3x$, Ableitung 3. $f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$
- c)** Innere Funktion $5x$, Ableitung 5. $f'(x) = \cos(5x) \cdot 5 = 5 \cos(5x)$
- d)** Innere Funktion $4x - 1$, Ableitung 4. $f'(x) = \frac{1}{2}(4x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x - 1}}$
- e)** Innere Funktion x^2 , Ableitung $2x$. $f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x = -2x \sin(x^2)$
- f)** Innere Funktion $x^3 - 2x$, Ableitung $3x^2 - 2$. $f'(x) = 6(x^3 - 2x)^5 \cdot (3x^2 - 2)$
- g)** Innere Funktion $-x^2$, Ableitung $-2x$. $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$
- h)** Umschreiben als $(2x + 1)^{-3}$. Innere Funktion $2x + 1$, Ableitung 2. $f'(x) = -3(2x + 1)^{-4} \cdot 2 = -\frac{6}{(2x + 1)^4}$

Kapitel 5, Die Produktregel

Die Produktregel für ein Produkt aus zwei Funktionen

Die Produktregel wird immer dann gebraucht, wenn zwei Funktionen, die beide von x abhängen, miteinander multipliziert werden.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \implies f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In Worten bedeutet das, dass die Ableitung des ersten Faktors mit dem zweiten Faktor multipliziert wird, und dazu der erste Faktor mit der Ableitung des zweiten Faktors multipliziert wird.

Wichtiger Hinweis. Wenn nur ein konstanter Faktor vor einer Funktion steht, wird die einfachere Faktorregel verwendet, nicht die Produktregel. Die Produktregel wird nur gebraucht, wenn beide Faktoren tatsächlich von der Variablen x abhängen.

Beispiel: Produktregel bei zwei ganzrationalen Funktionen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 1)$.

Wir setzen $u(x) = 2x + 3$ mit der Ableitung $u'(x) = 2$, und $v(x) = x^2 - 1$ mit der Ableitung $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (x^2 - 1) + (2x + 3) \cdot 2x \\ f'(x) &= 2x^2 - 2 + 4x^2 + 6x = 6x^2 + 6x - 2 \end{aligned}$$

Beispiel: Produktregel mit Exponentialfunktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

Wir setzen $u(x) = x^2$ mit der Ableitung $u'(x) = 2x$, und $v(x) = e^x$ mit der Ableitung $v'(x) = e^x$.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$$

Im letzten Schritt wurde der gemeinsame Faktor e^x ausgeklammert, was das Ergebnis übersichtlicher macht.

Beispiel: Produktregel mit trigonometrischer Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x)$.

Wir setzen $u(x) = x$ mit der Ableitung $u'(x) = 1$, und $v(x) = \cos(x)$ mit der Ableitung $v'(x) = -\sin(x)$.

$$f'(x) = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) = \cos(x) - x \sin(x)$$

Aufgabe 5, Produktregel anwenden

Bestimme jeweils $u(x)$ und $v(x)$, leite beide einzeln ab, und wende dann die Produktregel an.

a) $f(x) = x \cdot e^x$

b) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$

c) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

d) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$

e) $f(x) = (2x - 1) \cdot \cos(x)$

f) $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + 2)$

Lösung: Aufgabe 5

a) $u = x, u' = 1, v = e^x, v' = e^x. f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

b) $u = x + 1, u' = 1, v = x - 3, v' = 1. f'(x) = (x - 3) + (x + 1) = 2x - 2$

c) $u = x^2, u' = 2x, v = \sin(x), v' = \cos(x). f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$

d) $u = \sqrt{x}, u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, v = e^x, v' = e^x. f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x$

e) $u = 2x - 1, u' = 2, v = \cos(x), v' = -\sin(x). f'(x) = 2 \cos(x) - (2x - 1) \sin(x)$

f) $u = x^3, u' = 3x^2, v = x^2 + 2, v' = 2x. f'(x) = 3x^2(x^2 + 2) + x^3 \cdot 2x = 5x^4 + 6x^2$

Kapitel 6, Mehrere Regeln gemeinsam anwenden

Wie man die passende Strategie findet

In vielen Abituraufgaben muss mehr als eine Regel verwendet werden. Mit der folgenden Vorgehensweise findest du jedes Mal die richtige Strategie.

1. Schau dir die Funktion in ihrer Grundstruktur an. Stehen zwei Funktionen multipliziert nebeneinander, wird die Produktregel gebraucht.
2. Prüfe jeden einzelnen Faktor, ob er selbst wieder eine verschachtelte Funktion ist. Wenn ja, wird beim Ableiten dieses Faktors zusätzlich die Kettenregel gebraucht.
3. Leite jeden Faktor in Ruhe einzeln ab, bevor du die Ergebnisse in die Produktregel einsetzt.
4. Fasse das Endergebnis zusammen, oft lässt sich ein gemeinsamer Faktor ausklammern.

Beispiel: Produktregel und Kettenregel kombiniert

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$.

Diese Funktion ist ein Produkt aus $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^{3x}$, deshalb wird die Produktregel gebraucht. Der zweite Faktor ist zusätzlich eine verschachtelte Funktion, deshalb wird beim Ableiten von $v(x)$ die Kettenregel benötigt.

Ableitung des ersten Faktors, mit der Potenzregel.

$$u(x) = x^2 \implies u'(x) = 2x$$

Ableitung des zweiten Faktors, mit der Kettenregel, da die innere Funktion $3x$ mit der Ableitung drei lautet.

$$v(x) = e^{3x} \implies v'(x) = 3e^{3x}$$

Einsetzen in die Produktregel.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = e^{3x}(2x + 3x^2)$$

Beispiel: Kettenregel mit innerer Produktregel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(x^2 \cdot e^x)$.

Die äußere Funktion ist der Sinus, die innere Funktion ist $v(x) = x^2 \cdot e^x$. Da diese innere Funktion selbst ein Produkt ist, wird zur Berechnung von $v'(x)$ die Produktregel gebraucht.

Ableitung der inneren Funktion mit der Produktregel.

$$v(x) = x^2 \cdot e^x \implies v'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$$

Einsetzen in die Kettenregel.

$$f'(x) = \cos(x^2 \cdot e^x) \cdot e^x(2x + x^2)$$

Beispiel: Kettenregel mit Wurzel und Produkt im Inneren

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Die äußere Funktion ist die Exponentialfunktion, die innere Funktion ist die Wurzel aus x . Die Ableitung der Wurzel haben wir bereits in Kapitel zwei berechnet.

$$v(x) = \sqrt{x} \quad \implies \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Einsetzen in die Kettenregel.

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6, Kombinierte Regeln anwenden

Bestimme zuerst, welche Regeln gebraucht werden, und leite dann vollständig ab.

- a) $f(x) = x \cdot e^{2x}$
- b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x)$
- c) $f(x) = (x^2 + 1)^3 \cdot x$
- d) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x)$
- e) $f(x) = e^{x^2+1}$
- f) $f(x) = \cos(3x^2 - 2x)$
- g) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x+1}$
- h) $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x)$

Lösung: Aufgabe 6

a) Produktregel mit Kettenregel im zweiten Faktor. $u = x$, $u' = 1$. $v = e^{2x}$, $v' = 2e^{2x}$.

$$f'(x) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x)$$

b) Produktregel mit Kettenregel im zweiten Faktor. $u = \sin(x)$, $u' = \cos(x)$. $v = \cos(2x)$, $v' = -2\sin(2x)$.

$$f'(x) = \cos(x) \cos(2x) - 2\sin(x) \sin(2x)$$

c) Produktregel mit Kettenregel im ersten Faktor. $u = (x^2 + 1)^3$, $u' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2$. $v = x$, $v' = 1$.

$$f'(x) = 6x(x^2 + 1)^2 \cdot x + (x^2 + 1)^3 = (x^2 + 1)^2(6x^2 + x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2(7x^2 + 1)$$

d) Produktregel. $u = \sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $v = \sin(x)$, $v' = \cos(x)$.

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos(x)$$

e) Kettenregel. Innere Funktion $x^2 + 1$, Ableitung $2x$.

$$f'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x = 2xe^{x^2+1}$$

f) Kettenregel. Innere Funktion $3x^2 - 2x$, Ableitung $6x - 2$.

$$f'(x) = -\sin(3x^2 - 2x) \cdot (6x - 2)$$

g) Produktregel mit Kettenregel im zweiten Faktor. $u = x^2$, $u' = 2x$. $v = (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$, $v' = \frac{1}{2}(2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$.

$$f'(x) = 2x\sqrt{2x + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{2x + 1}}$$

h) Produktregel. $u = e^x$, $u' = e^x$. $v = x^2 - 3x$, $v' = 2x - 3$.

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3)$$

Kapitel 7, Große Übungssammlung zum Abschluss

Tipp

Bestimme bei jeder Aufgabe zuerst gedanklich, welche Regel oder welche Kombination von Regeln benötigt wird, bevor du mit dem Rechnen beginnst. Diese kurze Planung spart in der Klassenarbeit oder im Abitur wertvolle Zeit.

Aufgabe 7, Gemischte Übungsaufgaben

Leite die folgenden Funktionen vollständig ab.

a) $f(x) = 4x^3 - \sqrt{x} + e^x$

b) $f(x) = (5x - 2)^4$

c) $f(x) = x \cdot \cos(3x)$

d) $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3 \sin(x)$

e) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin(x)$

f) $f(x) = \sqrt{3x + 4}$

g) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

h) $f(x) = \cos(x) \cdot \sqrt{x}$

i) $f(x) = (x^2 - 2x)^3 \cdot e^x$

j) $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(x)$

Lösung: Aufgabe 7**a)** Faktorregel, Potenzregel und Grundableitungen.

$$f'(x) = 12x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x$$

b) Kettenregel, innere Funktion $5x - 2$, Ableitung 5.

$$f'(x) = 4(5x - 2)^3 \cdot 5 = 20(5x - 2)^3$$

c) Produktregel mit Kettenregel im zweiten Faktor. $u = x$, $u' = 1$. $v = \cos(3x)$, $v' = -3 \sin(3x)$.

$$f'(x) = \cos(3x) - 3x \sin(3x)$$

d) Faktorregel und Potenzregel, der erste Summand wird als $2x^{-2}$ geschrieben.

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3} + 3 \cos(x)$$

e) Produktregel mit Kettenregel im ersten Faktor. $u = e^{2x}$, $u' = 2e^{2x}$. $v = \sin(x)$, $v' = \cos(x)$.

$$f'(x) = 2e^{2x} \sin(x) + e^{2x} \cos(x) = e^{2x}(2 \sin(x) + \cos(x))$$

f) Kettenregel, innere Funktion $3x + 4$, Ableitung 3.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}}$$

g) Produktregel mit Kettenregel im zweiten Faktor. $u = x^2$, $u' = 2x$. $v = e^{-x}$, $v' = -e^{-x}$.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$$

h) Produktregel. $u = \cos(x)$, $u' = -\sin(x)$. $v = \sqrt{x}$, $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = -\sin(x)\sqrt{x} + \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}}$$

i) Produktregel mit Kettenregel im ersten Faktor. $u = (x^2 - 2x)^3$, $u' = 3(x^2 - 2x)^2 \cdot (2x - 2)$. $v = e^x$, $v' = e^x$.

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x)^2(2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)^3e^x$$

Ausklammern von $(x^2 - 2x)^2e^x$ liefert ein übersichtlicheres Ergebnis.

$$f'(x) = (x^2 - 2x)^2e^x (3(2x - 2) + (x^2 - 2x)) = (x^2 - 2x)^2e^x(x^2 + 4x - 6)$$

j) Produktregel mit Kettenregel im ersten Faktor. $u = \sin(2x)$, $u' = 2 \cos(2x)$. $v = \cos(x)$, $v' = -\sin(x)$.

$$f'(x) = 2 \cos(2x) \cos(x) - \sin(2x) \sin(x)$$

Fehler sind Helfer, Mathe darf leicht sein!

Du hast alle sieben Kapitel durchgearbeitet und kennst jetzt jede Ableitungsregel, die in der Schule vorkommt.

Mehr Materialien, Bücher und Kurse findest du auf **www.mathsparks.de** und auf **eduki.com/de/autor/15428/mathsparks**