

Algebraische Umformungen

Terme vereinfachen, Formeln umstellen und Gleichungen lösen mit
Geometrie und Physik als Anwendungskontext

Klasse 7 bis Kursstufe, Realschule und Gymnasium

Ein MathSparks Produkt von Meike Iwanek, www.mathsparks.de

Was dich in diesem Workbook erwartet

Algebraische Umformungen begegnen dir in jedem Mathematikunterricht, von der Vereinfachung einfacher Terme bis zur Umstellung komplexer Formeln aus Geometrie und Physik. Dieses Workbook beginnt bei den allerersten Grundlagen und führt dich Schritt für Schritt bis zu anspruchsvollen Formeln aus der Kursstufe.

Der besondere Schwerpunkt liegt auf dem Umstellen von Formeln, denn das ist genau die Fähigkeit, bei der viele Schülerinnen und Schüler unsicher sind. Mit den gelben Formelboxen findest du alle wichtigen Formeln sofort auf einen Blick.

Für wen? Schülerinnen und Schüler der Klassen 7 bis zur Kursstufe, sowie Eltern und Lehrer, die beim Thema Formeln umstellen gezielt helfen möchten.

So arbeitest du mit diesem Workbook

1. Lies den roten Merkkasten, dort steht die Regel.
2. Die gelbe Formelbox zeigt dir die Originalformel, bevor du sie umstellst.
3. Schau dir das blaue Beispiel genau an und verfolge jeden Schritt.
4. Löse die Aufgaben selbst und nutze den Freiraum.
5. Vergleiche deine Lösung mit der grünen Lösungsbox.

Kapitel 1, Terme vereinfachen

Grundregeln für das Vereinfachen von Termen

Beim Vereinfachen eines Terms bringen wir ihn in eine möglichst kurze und übersichtliche Form, ohne seinen Wert zu verändern. Dafür gelten folgende Regeln.

Gleichartige Terme zusammenfassen. Nur Terme mit derselben Variable und demselben Exponenten können addiert oder subtrahiert werden. Der Koeffizient ändert sich, die Variable bleibt gleich.

$$3x + 5x = 8x$$

$$7a^2 - 2a^2 = 5a^2$$

Klammern auflösen mit dem Distributivgesetz. Steht ein Faktor vor einer Klammer, wird jeder Summand in der Klammer mit diesem Faktor multipliziert.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$-(a + b) = -a - b$$

Achtung bei Minuskammern. Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer, kehren sich alle Vorzeichen innerhalb der Klammer um. Das ist der häufigste Fehler überhaupt.

$$-(3x - 4) = -3x + 4$$

Beispiel: Term vollständig vereinfachen

Gegeben ist der Term $T = 4(2x - 3) - (x + 5) + 3x$.

Zuerst werden alle Klammern aufgelöst.

$$T = 8x - 12 - x - 5 + 3x$$

Dann werden gleichartige Terme zusammengefasst. Die x Terme ergeben $8x - x + 3x = 10x$, die Zahlen ergeben $-12 - 5 = -17$.

$$T = 10x - 17$$

Tipp

Schreibe nach dem Auflösen der Klammern alle Terme erst untereinander, bevor du zusammenfasst. So übersiehst du kein Vorzeichen. Unterstreiche zur Kontrolle alle x Terme und alle Zahlen in verschiedenen Farben.

Aufgabe 1, Terme vereinfachen

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $5x + 3x - 2x$

b) $4a - 7 + 3a + 2$

c) $3(x + 4) + 2(x - 1)$

d) $5(2a - 3) - (a + 4)$

e) $2(x^2 + 3x) - x(x - 1)$

f) $4(a + b) - 3(a - 2b) + b$

g) $\frac{1}{2}(4x - 6) + \frac{1}{3}(6x + 9)$

h) $3(x^2 - 2x + 1) - 2(x^2 + x - 3)$

Lösung: Aufgabe 1

a) $6x$

b) $7a - 5$

c) $3x + 12 + 2x - 2 = 5x + 10$

d) $10a - 15 - a - 4 = 9a - 19$

e) $2x^2 + 6x - x^2 + x = x^2 + 7x$

f) $4a + 4b - 3a + 6b + b = a + 11b$

g) $2x - 3 + 2x + 3 = 4x$

h) $3x^2 - 6x + 3 - 2x^2 - 2x + 6 = x^2 - 8x + 9$

Kapitel 2, Binomische Formeln als Umformungswerkzeug

Die drei binomischen Formeln

Die binomischen Formeln sind Abkürzungen für bestimmte Produkte. Sie werden beim Vereinfachen und beim Faktorisieren von Termen sehr häufig gebraucht.

Erste Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Zweite Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dritte Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Rückwärts lesen zum Faktorisieren. Die binomischen Formeln können auch rückwärts gelesen werden, um einen Term als Produkt zweier Klammern zu schreiben. Das nennt man Faktorisieren.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Beispiel: Binomische Formeln vorwärts und rückwärts

a) Vorwärts, Term ausrechnen:

$$(3x + 4)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

b) Rückwärts, faktorisieren:

$$25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2 = (5x + 6)(5x - 6)$$

c) Erkennen und kürzen:

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = x - 3 \quad (x \neq -3)$$

Aufgabe 2, Binomische Formeln anwenden

- a)** Berechne mithilfe der binomischen Formeln.

$$(2x + 5)^2 \quad (3a - 2)^2 \quad (4x + 1)(4x - 1)$$

- b)** Faktorisiere mithilfe der binomischen Formeln.

$$x^2 + 8x + 16 \quad 9a^2 - 12a + 4 \quad 16x^2 - 49$$

- c)** Vereinfache den folgenden Term, indem du zuerst die binomische Formel anwendest und dann zusammenfasst.

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2$$

- d)** Kürze den folgenden Bruchterm vollständig. Gib dabei die Einschränkung der Definitionsmenge an.

$$\frac{4x^2 - 25}{2x + 5}$$

Lösung: Aufgabe 2

a) $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$. $(3a - 2)^2 = 9a^2 - 12a + 4$. $(4x + 1)(4x - 1) = 16x^2 - 1$.

b) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$. $9a^2 - 12a + 4 = (3a - 2)^2$. $16x^2 - 49 = (4x + 7)(4x - 7)$.

c) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = 12x$.

d) $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$, also $\frac{(2x + 5)(2x - 5)}{2x + 5} = 2x - 5$ für $x \neq -2,5$.

Kapitel 3, Einfache Formeln umstellen

Das Prinzip des Formel Umstellens

Eine Formel umstellen bedeutet, sie nach einer anderen Variablen als der ursprünglichen aufzulösen. Dazu verwendet man genau dieselben Äquivalenzumformungen wie beim Lösen einer gewöhnlichen Gleichung. Man darf auf beiden Seiten dieselbe Operation durchführen, solange man es auf beiden Seiten tut.

Strategie in vier Schritten.

1. Identifiziere die gesuchte Variable.
2. Bringe alle Terme mit der gesuchten Variable auf eine Seite.
3. Bringe alle anderen Terme auf die andere Seite.
4. Löse nach der gesuchten Variable auf, indem du dividierst, Wurzel ziehst oder ähnliches.

Wichtige Regel. Was auf einer Seite passiert, muss auf der anderen Seite genauso passieren. Wer das konsequent beachtet, macht beim Umstellen keine Fehler.

Formel: Rechteck, Dreieck und Trapez

$$A_{\text{Rechteck}} = l \cdot b$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{g \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$$

Beispiel: Formel nach verschiedenen Variablen umstellen

a) Die Formel $A = l \cdot b$ soll nach l umgestellt werden.

$$\begin{array}{l} A = l \cdot b \quad | : b \\ \frac{A}{b} = l \end{array}$$

Die umgestellte Formel lautet $l = \frac{A}{b}$.

b) Die Dreiecksformel $A = \frac{g \cdot h}{2}$ soll nach h umgestellt werden.

$$\begin{array}{l} A = \frac{g \cdot h}{2} \quad | \cdot 2 \\ 2A = g \cdot h \quad | : g \\ \frac{2A}{g} = h \end{array}$$

Die umgestellte Formel lautet $h = \frac{2A}{g}$.

Aufgabe 3, Einfache Formeln umstellen

Stelle jede Formel nach der angegebenen Variable um.

a) $U_{\text{Rechteck}} = 2(l + b)$ nach l

b) $A_{\text{Trapez}} = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$ nach h

c) $P = \frac{F}{A}$ (Druck gleich Kraft durch Fläche) nach A

d) $v = \frac{s}{t}$ (Geschwindigkeit gleich Strecke durch Zeit) nach s und dann nach t

e) $T = \frac{P}{U}$ (Strom gleich Leistung durch Spannung, Ohmsches Gesetz) nach P

f) $\rho = \frac{m}{V}$ (Dichte gleich Masse durch Volumen) nach m und dann nach V

Lösung: Aufgabe 3

a) $U = 2(l + b) \mid : 2$, also $\frac{U}{2} = l + b \mid - b$, also $l = \frac{U}{2} - b$.

b) $A = \frac{(a + c)h}{2} \mid \cdot 2$, also $2A = (a + c)h \mid : (a + c)$, also $h = \frac{2A}{a + c}$.

c) $P = \frac{F}{A} \mid \cdot A$, also $PA = F \mid : P$, also $A = \frac{F}{P}$.

d) Nach s , $v = \frac{s}{t} \mid \cdot t$, also $s = v \cdot t$. Nach t , $v = \frac{s}{t} \mid \cdot t$, also $vt = s \mid : v$, also $t = \frac{s}{v}$.

e) $T = \frac{P}{U} \mid \cdot U$, also $P = T \cdot U$.

f) Nach m , $\rho = \frac{m}{V} \mid \cdot V$, also $m = \rho \cdot V$. Nach V , ebenso $\rho V = m \mid : \rho$, also $V = \frac{m}{\rho}$.

Kapitel 4, Volumen und Oberflächenformeln umstellen

Formel: Wichtige Körperformeln

Körper	Formel
Quader	$V = l \cdot b \cdot h$
Zylinder	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
Kegel	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
Kugel	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
Zylinder Oberfläche	$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
Kegel Mantelfläche	$M = \pi \cdot r \cdot s$

Besonderheiten beim Umstellen von Körperformeln

Bei Körperformeln tauchen häufig Situationen auf, die beim Umstellen besondere Aufmerksamkeit erfordern.

Quadrierte Variable. Wenn die gesuchte Variable quadriert vorkommt, muss am Ende Wurzel gezogen werden. Dabei gilt, dass nur die positive Wurzel relevant ist, da eine Länge niemals negativ sein kann.

Variable hoch drei. Wenn die gesuchte Variable in der dritten Potenz vorkommt, muss am Ende die dritte Wurzel gezogen werden.

Faktor ausklammern. Wenn die gesuchte Variable in mehreren Summanden vorkommt, muss sie zuerst ausgeklammert werden, bevor dividiert werden kann.

Beispiel: Pyramidenvolumen nach der Höhe umstellen

Gegeben ist die Formel für das Pyramidenvolumen.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Wir stellen nach h um.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h & | \cdot 3 \\ 3V &= G \cdot h & | : G \\ h &= \frac{3V}{G} \end{aligned}$$

Anwendung. Eine Pyramide hat ein Volumen von 120 cm^3 und eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge 6 cm . Wir berechnen die Höhe.

$$G = 6^2 = 36 \text{ cm}^2 \qquad h = \frac{3 \cdot 120}{36} = \frac{360}{36} = 10 \text{ cm}$$

Beispiel: Zylindervolumen nach dem Radius umstellen

Gegeben ist die Formel $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Wir stellen nach r um.

$$\begin{array}{ll} V = \pi \cdot r^2 \cdot h & | : \pi h \\ \frac{V}{\pi h} = r^2 & | \sqrt{} \\ r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} & \end{array}$$

Anwendung. Ein Zylinder hat das Volumen 500 cm^3 und die Höhe $h = 10 \text{ cm}$.

$$r = \sqrt{\frac{500}{\pi \cdot 10}} = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx \sqrt{15,92} \approx 3,99 \text{ cm}$$

Aufgabe 4, Körperformeln umstellen und anwenden

- a) Stelle die Quaderformel $V = l \cdot b \cdot h$ nach b um und berechne b , wenn $V = 240 \text{ cm}^3$, $l = 8 \text{ cm}$ und $h = 5 \text{ cm}$.
- b) Stelle die Kegelformel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nach r um.
- c) Stelle die Kugelformel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ nach r um.
- d) Ein Zylinder hat das Volumen $V = 800 \text{ cm}^3$ und den Radius $r = 5 \text{ cm}$. Berechne die Höhe des Zylinders.
- e) Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat das Volumen $V = 192 \text{ cm}^3$ und die Höhe $h = 6 \text{ cm}$. Wie lang ist die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche?
- f) Stelle die Formel für die Zylinderoberfläche $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ nach h um.

Lösung: Aufgabe 4

a) $b = \frac{V}{l \cdot h} = \frac{240}{8 \cdot 5} = \frac{240}{40} = 6 \text{ cm.}$

b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \mid \cdot 3, \text{ also } 3V = \pi r^2 h \mid : \pi h, \text{ also } r^2 = \frac{3V}{\pi h}, \text{ also } r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}.$

c) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \mid \cdot 3, \text{ also } 3V = 4\pi r^3 \mid : 4\pi, \text{ also } r^3 = \frac{3V}{4\pi}, \text{ also } r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$

d) $V = \pi r^2 h \mid \div \pi r^2, \text{ also } h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{800}{\pi \cdot 25} = \frac{800}{25\pi} \approx 10,19 \text{ cm.}$

e) $G = \frac{3V}{h} = \frac{3 \cdot 192}{6} = \frac{576}{6} = 96 \text{ cm}^2. \text{ Seitenlänge, } a = \sqrt{96} \approx 9,8 \text{ cm.}$

f) $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h \mid - 2\pi r^2, \text{ also } O - 2\pi r^2 = 2\pi r h \mid : 2\pi r, \text{ also } h = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r}.$

Kapitel 5, Physikalische Formeln umstellen

Formel: Wichtige Physikformeln

Formel	Bedeutung	Variablen
$v = \frac{s}{t}$	Geschwindigkeit	s Strecke, t Zeit
$P = U \cdot I$	Elektrische Leistung	U Spannung, I Stromstärke
$U = R \cdot I$	Ohmsches Gesetz	R Widerstand, I Stromstärke
$p = \rho \cdot g \cdot h$	Schweredruck	ρ Dichte, g Erdbeschleunigung, h Tiefe
$E = m \cdot c^2$	Energie Masse Äquivalenz	m Masse, c Lichtgeschwindigkeit
$F = m \cdot a$	Newtonsches Gesetz	m Masse, a Beschleunigung

Beispiel: Ohmsches Gesetz in alle Richtungen umstellen

Die Grundformel lautet $U = R \cdot I$.

Nach R umstellen:

$$U = R \cdot I \quad | : I \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U}{I}$$

Nach I umstellen:

$$U = R \cdot I \quad | : R \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R}$$

Anwendung. Ein Widerstand von $R = 50 \Omega$ liegt an einer Spannung von $U = 230 \text{ V}$. Berechne die Stromstärke.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{230}{50} = 4,6 \text{ A}$$

Beispiel: Schweredruck nach der Tiefe umstellen

Gegeben ist die Formel $p = \rho \cdot g \cdot h$.

Wir stellen nach der Tiefe h um.

$$p = \rho \cdot g \cdot h \quad | : \rho g$$

$$h = \frac{p}{\rho \cdot g}$$

Anwendung. In welcher Tiefe beträgt der Wasserdruck $p = 200\,000 \text{ Pa}$, wenn $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ und $g = 10 \text{ m/s}^2$?

$$h = \frac{200\,000}{1000 \cdot 10} = \frac{200\,000}{10\,000} = 20 \text{ m}$$

Aufgabe 5, Physikalische Formeln umstellen

- a) Stelle $P = U \cdot I$ nach U um und berechne die Spannung, wenn $P = 1200 \text{ W}$ und $I = 6 \text{ A}$.
- b) Stelle $v = \frac{s}{t}$ nach t um und berechne die Zeit, die ein Auto mit $v = 120 \text{ km/h}$ für eine Strecke von $s = 450 \text{ km}$ benötigt.
- c) Stelle $F = m \cdot a$ nach m um und berechne die Masse eines Körpers, der bei einer Kraft von $F = 360 \text{ N}$ die Beschleunigung $a = 4 \text{ m/s}^2$ erfährt.
- d) Stelle $E = m \cdot c^2$ nach m um.
- e) Gegeben ist die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$. Stelle die Formel nach v um.

Lösung: Aufgabe 5

a) $U = \frac{P}{I} = \frac{1200}{6} = 200 \text{ V}.$

b) $t = \frac{s}{v} = \frac{450}{120} = 3,75 \text{ Stunden, das sind 3 Stunden und 45 Minuten.}$

c) $m = \frac{F}{a} = \frac{360}{4} = 90 \text{ kg}.$

d) $E = mc^2 \mid : c^2, \text{ also } m = \frac{E}{c^2}.$

e) $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \mid \cdot 2, \text{ also } 2E_{\text{kin}} = mv^2 \mid : m, \text{ also } v^2 = \frac{2E_{\text{kin}}}{m} \mid \sqrt{}, \text{ also } v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m}}.$

Kapitel 6, Komplexere Formeln mit mehreren Schritten

Wenn die gesuchte Variable mehrfach vorkommt

Manchmal erscheint die gesuchte Variable in einer Formel an mehreren Stellen. In diesem Fall reicht einfaches Dividieren nicht aus. Man muss die Variable zuerst ausklammern.

Vorgehen.

1. Alle Terme mit der gesuchten Variable auf eine Seite bringen.
2. Die gesuchte Variable ausklammern.
3. Durch den entstandenen Klammerausdruck dividieren.

Wenn unter einer Wurzel oder im Quadrat. Kommt die gesuchte Variable quadriert vor, muss am Ende Wurzel gezogen werden. Bei Wurzeln muss zuerst quadriert werden, um die Wurzel zu entfernen.

Beispiel: Variable kommt zweimal vor, Ausklammern nötig

Gegeben ist die Formel $A = \pi r s + \pi r^2$ (Kegeloberfläche). Wir stellen nach r um. Beide Summanden enthalten r , also klammern wir aus.

$$A = \pi r(s + r)$$

Jetzt dividieren wir durch den Faktor $\pi(s + r)$.

$$r = \frac{A}{\pi(s + r)}$$

Hinweis: Da r auf beiden Seiten vorkommt, ist diese Gleichung nicht direkt nach r aufgelöst. In solchen Fällen begnügt man sich oft mit dieser halbimpliziten Form oder löst numerisch.

Beispiel: Formel mit Wurzel umstellen

Gegeben ist die Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (Schwingungsdauer eines Pendels). Wir stellen nach l um.

$$\begin{array}{ll}
 T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} & | : 2\pi \\
 \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}} & | (\cdot)^2 \\
 \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g} & | \cdot g \\
 l = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} &
 \end{array}$$

Beispiel: Formel aus der Optik umstellen

Die Linsenformel lautet $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$, wobei f die Brennweite, b die Bildweite und g die Gegenstandsweite sind. Wir stellen nach g um.

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} & | - \frac{1}{b} \\
 \frac{1}{g} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b} & \text{Hauptnenner } bf \\
 \frac{1}{g} = \frac{b}{bf} - \frac{f}{bf} = \frac{b-f}{bf} & | \text{ Kehrwert} \\
 g = \frac{bf}{b-f} &
 \end{array}$$

Aufgabe 6, Komplexere Formeln umstellen

- a) Die Formel für den Umfang des Kreises lautet $U = 2\pi r$. Stelle nach r um und berechne den Radius eines Kreises mit $U = 31,4 \text{ cm}$.
- b) Die Formel für die Kreisfläche lautet $A = \pi r^2$. Stelle nach r um.
- c) Gegeben ist die Formel $s = \frac{1}{2}at^2$ für den zurückgelegten Weg bei gleichmäßiger Beschleunigung. Stelle nach t um.
- d) Gegeben ist die Formel für die Zylinderoberfläche $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Stelle nach h um und berechne h , wenn $O = 300 \text{ cm}^2$ und $r = 5 \text{ cm}$.
- e) Gegeben ist die Winkelformel des Kreissektors $b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$. Stelle nach α um.

Lösung: Aufgabe 6

a) $r = \frac{U}{2\pi} = \frac{31,4}{2\pi} \approx 5 \text{ cm.}$

b) $A = \pi r^2 \mid : \pi, \text{ also } r^2 = \frac{A}{\pi}, \text{ also } r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$

c) $s = \frac{1}{2}at^2 \mid \cdot 2, \text{ also } 2s = at^2 \mid : a, \text{ also } t^2 = \frac{2s}{a}, \text{ also } t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$

d) $O - 2\pi r^2 = 2\pi r h \mid : 2\pi r, \text{ also } h = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r}. \text{ Einsetzen, } h = \frac{300 - 2\pi \cdot 25}{2\pi \cdot 5} = \frac{300 - 157,08}{31,42} \approx \frac{142,92}{31,42} \approx 4,55 \text{ cm.}$

e) $b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r \mid : 2\pi r, \text{ also } \frac{b}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360} \mid \cdot 360, \text{ also } \alpha = \frac{360 \cdot b}{2\pi r} = \frac{180b}{\pi r}.$

Kapitel 7, Pythagoras und verwandte Formeln

Formel: Satz des Pythagoras und Ableitungen

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \implies \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Die Mantellinie s eines Kegels ergibt sich aus Radius r und Höhe h ebenfalls über Pythagoras.

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Pythagoras in komplexen Figuren und Körpern

Der Satz des Pythagoras taucht nicht nur bei einfachen rechtwinkligen Dreiecken auf, sondern überall dort, wo eine Diagonale, eine Höhe oder eine Entfernung berechnet werden soll. In Körpern wird er oft mehrfach angewendet.

Raumdiagonale des Quaders. Die Raumdiagonale d des Quaders mit den Seiten l , b und h berechnet sich in zwei Schritten über Pythagoras.

$$d = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

Diese Formel nach einer Seite umstellen.

$$d^2 = l^2 + b^2 + h^2 \quad \implies \quad l = \sqrt{d^2 - b^2 - h^2}$$

Beispiel: Raumdiagonale und Körperhöhe berechnen

a) Ein Quader hat die Abmessungen $l = 3$, $b = 4$ und $h = 12$. Berechne die Raumdiagonale.

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

b) Ein Kegel hat die Mantellinie $s = 13$ cm und den Radius $r = 5$ cm. Berechne die Höhe.

$$s^2 = r^2 + h^2 \quad \implies \quad h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Aufgabe 7, Pythagoras anwenden und umstellen

- a) Eine Leiter der Länge $c = 5$ m lehnt an einer Wand und hat den Abstand $a = 3$ m zur Wand. In welcher Höhe b berührt sie die Wand?
- b) Ein Quader hat die Grundfläche 4 cm mal 3 cm und die Raumdiagonale $d = 13$ cm. Berechne die Höhe des Quaders.
- c) Ein Kegel hat das Volumen $V = 200 \text{ cm}^3$ und die Mantellinie $s = 10$ cm. Berechne zuerst den Radius r , dann die Höhe h mit Pythagoras. Hinweis, stelle die Kegelformel zuerst nach h um und ersetze h dann durch $h = \sqrt{s^2 - r^2}$.
- d) Die Diagonale eines Rechtecks beträgt $d = 10$ cm und eine Seite $l = 8$ cm. Berechne die andere Seite b .

Lösung: Aufgabe 7

a) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ m.}$

b) Grundflächendiagonale, $d_G = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$ Dann Raumdiagonale, $d^2 = d_G^2 + h^2 \Rightarrow 169 = 25 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$

c) Zunächst aus $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nach h umstellen, $h = \frac{3V}{\pi r^2}$. Pythagoras gibt $h = \sqrt{s^2 - r^2}$. Gleichsetzen und numerisch lösen: für $r \approx 4,37 \text{ cm}$ ergibt sich $h \approx 9,03 \text{ cm}$ (Näherung mit WTR).

d) $b = \sqrt{d^2 - l^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm.}$

Kapitel 8, Gemischte Aufgaben zur Selbstkontrolle

Tipp

Gehe bei jeder Aufgabe in derselben Reihenfolge vor. Erstens, lies die Formel sorgfältig. Zweitens, markiere die gesuchte Variable. Drittens, plane die Schritte bevor du rechnest. Viertens, führe die Umformungen sauber durch. Fünftens, setze die Zahlenwerte ein und berechne das Ergebnis.

Aufgabe 8, Alle Themen gemischt

- a) Vereinfache den Term $3(2x - 5) - 2(x + 4) + 4x$ vollständig.
- b) Faktoriere $4x^2 - 20x + 25$ mithilfe einer binomischen Formel.
- c) Ein Schwimmbecken hat die Form eines Quaders mit der Länge $l = 20$ m, der Breite $b = 8$ m und dem Volumen $V = 480 \text{ m}^3$. Stelle die Quaderformel nach h um und berechne die Tiefe des Beckens.
- d) Die Formel für den elektrischen Widerstand lautet $R = \frac{\rho \cdot l}{A}$, wobei ρ der spezifische Widerstand, l die Leiterlänge und A der Querschnitt ist. Stelle nach A um.
- e) Ein Pendel schwingt mit der Periode $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Berechne die Länge l des Pendels, wenn $T = 2$ s und $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- f) Eine rechteckige Fläche hat den Umfang $U = 34$ cm und die Länge $l = 10$ cm. Stelle $U = 2(l + b)$ nach b um und berechne die Breite.
- g) Stelle die Formel $v^2 = v_0^2 + 2as$ nach s um und berechne s für $v = 20$, $v_0 = 0$ und $a = 4$.

Lösung: Aufgabe 8

a) $6x - 15 - 2x - 8 + 4x = 8x - 23.$

b) $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = (2x - 5)^2.$

c) $h = \frac{V}{l \cdot b} = \frac{480}{20 \cdot 8} = \frac{480}{160} = 3 \text{ m}.$

d) $R = \frac{\rho l}{A} \mid \cdot A, \text{ also } RA = \rho l \mid : R, \text{ also } A = \frac{\rho l}{R}.$

e) $\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ also } \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g}, \text{ also } l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,81 \cdot 4}{4\pi^2} \approx \frac{39,24}{39,48} \approx 0,994 \text{ m}.$

f) $b = \frac{U}{2} - l = \frac{34}{2} - 10 = 17 - 10 = 7 \text{ cm}.$

g) $v^2 - v_0^2 = 2as \mid : 2a, \text{ also } s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{400 - 0}{8} = 50.$

Fehler sind Helfer, Mathe darf leicht sein!

Du hast alle acht Kapitel durchgearbeitet und kannst jetzt jede algebraische Umformung und jede Formel selbstständig umstellen.

Mehr Materialien, Bücher und Kurse findest du auf **www.mathsparks.de** und bei **eduki.com/de/autor/15428/mathsparks**